Esercizi svolti su successioni e serie di funzioni

Esercizio 1. Calcolare il limite puntuale di

$$f_n(x) = \frac{x}{x^2 + \frac{1}{n}}, \qquad x \in [0, +\infty).$$

Dimostrare che non si ha convergenza uniforme su $(0, +\infty)$, mentre si ha convergenza uniforme su $[a, +\infty)$ per ogni $a > 0$.

Svolgimento. Per ogni $x \neq 0$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x}{x^2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{x},$$

mentre per $x = 0$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0.$$

Dunque il limite puntuale è

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Non può esserci convergenza uniforme su $[0, +\infty)$ perché f è discontinua in $x = 0$.

Si ha invece convergenza uniforme su ogni semiretta $[a, +\infty)$ con $a > 0$: infatti, si ha $\forall\, x \in [a, +\infty)$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x}{x^2 + \frac{1}{n}} - \frac{1}{x} \right| = \left| \frac{x}{x^2 + \frac{1}{n}} - \frac{1}{x} \right| = \left| \frac{-\frac{1}{n}}{x\left(x^2 + \frac{1}{n}\right)} \right| \leq \frac{1}{na^3} \tag{1}$$

dove, per concludere l'ultima disuguaglianza, è stato usato il fatto che

$$x\left(x^2 + \frac{1}{n}\right) \geq x^3 \geq a^3 \qquad \forall\, x \in [a, +\infty).$$

Segue allora da (1) che

$$\sup_{x\in[a,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{na^3} \to 0 \quad \text{per } n \to \infty.$$

Esercizio 2. Calcolare il limite puntuale su $[0, +\infty)$ di

$$f_n(x) = 1 + n \sin\left(\frac{x \arctan(x) \ln(x^2 + 1)}{n^2} \right).$$

Il limite è anche uniforme?

Svolgimento. Convergenza puntuale. Si osservi che per ogni $x \geq 0$ si ha

$$\frac{x \arctan(x) \ln(x^2 + 1)}{n^2} \to 0 \quad \text{per } n \to +\infty,$$

quindi, ricordando che $\sin(z) \sim z$ per $z \to 0$, abbiamo

$$\sin\left(\frac{x \arctan(x) \ln(x^2 + 1)}{n^2} \right) \sim \frac{x \arctan(x) \ln(x^2 + 1)}{n^2}$$

e si ha

$$\lim_{n\to+\infty} n \sin\left(\frac{x\arctan(x)\ln(x^2+1)}{n^2}\right) = \lim_{n\to+\infty} n\frac{x\arctan(x)\ln(x^2+1)}{n^2} = 0.$$

Dunque

$$f_n \to 1 \qquad \text{puntualmente.}$$

♣ **Strategia generale** per provare che

$$f_n \text{ NON converge uniformemente al limite puntuale } f \text{ su } I$$

- mostrare che esiste una successione $\{x_n\} \subset I$ tale che

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \not\to 0 \quad \text{per } n \to \infty.$$

- Allora non può esserci convergenza uniforme su I, perché si ha

$$\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(x_n) - f(x_n)| \not\to 0!$$

♣ Studio della Convergenza uniforme. Mostriamo che la convergenza di $\{f_n\}$ non è uniforme. Consideriamo i punti x_n tali che

$$\sin\left(\frac{x_n\arctan(x_n)\ln(x_n^2+1)}{n^2}\right) = 1. \tag{2}$$

Per questi punti si ha

$$f_n(x_n) - 1 = 1 + n - 1 = n \to +\infty$$

e dunque

$$\sup_{x\in[0,+\infty)} |f_n(x) - 1| \geq |f_n(x_n) - 1| = n \to +\infty.$$

Per ottenere la (2), possiamo ad esempio cercare punti x_n che soddisfino

$$x_n \arctan(x_n)\ln(x_n^2+1) = \frac{\pi}{2}n^2 \quad \forall\, n \geq 1. \tag{3}$$

L'esistenza di una successione $\{x_n\}$ per la quale valga la (3) è garantita dal teorema dei valori intermedi, in quanto la funzione continua

$$g(x) = x\arctan(x)\ln(x^2+1)$$

è tale che $g(0) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Quindi per ogni $n \geq 1$ esiste x_n con $g(x_n) = \frac{\pi}{2}n^2$.

Esercizio 3. Dimostrare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n^2x)\sin(3nx)}{\sqrt{n^3+7x^2}}, \quad x \in (0,+\infty)$$

converge uniformemente sugli intervalli $[a,b]$, per ogni $0 < a < b$.

Svolgimento. • È facile vedere che

$$\lim_{n\to+\infty}(-1)^n\frac{\ln(n^2x)\sin(3nx)}{\sqrt{n^3+7x^2}}=0\quad\forall\, x>0,$$

cosicché è verificata la condizione necessaria per la convergenza puntuale della serie su $(0,+\infty)$.
• Dimostriamo la convergenza assoluta su $(0,+\infty)$. Si ha per ogni $x\in(0,+\infty)$

$$|f_n(x)|=\frac{|2\ln(n)+\ln(x)||\sin(3nx)|}{\sqrt{n^3+7x^2}}\le\frac{2\ln(n)+|\ln(x)|}{n^{3/2}}.$$

Poiché le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n^{3/2}},\quad \ln(x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}\quad\text{convergono}$$

per il crit. confronto concludiamo che

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln(n^2x)\sin(3nx)}{\sqrt{n^3+7x^2}}\quad\text{converge assolutamente su }(0,+\infty).$$

• Convergenza totale su $[a,b]$. Si ha

$$\sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)|\le\sup_{x\in[a,b]}\frac{2\ln n+|\ln x|}{\sqrt{n^3+7x^2}}\le\frac{2\ln n+|\ln a|+|\ln b|}{n^{3/2}}.$$

Siccome

$$\sum\frac{2\ln n+|\ln a|+|\ln b|}{n^{3/2}}\ \text{converge}$$

su $[a,b]$, si ha convergenza totale su $[a,b]$ $\Rightarrow$ uniforme su $[a,b]$ per ogni $0<a<b$.

Esercizio 4. Determinare l'insieme di convergenza puntuale della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty}n(n+2)\frac{x^{n+2}}{(x+4)^n}\quad\text{per } x\in\mathbb{R}\setminus\{-4\}.$$

Svolgimento. • Condizione necessaria per la convergenza: bisogna verificare per quali $x\in\mathbb{R}\setminus\{-4\}$ si ha

$$f_n(x)=n(n+2)x^2\left(\frac{x}{x+4}\right)^n\to 0\quad\text{per } n\to\infty.$$

Si noti che l'andamento di $f_n(x)$ per $n\to+\infty$ dipende dalla quantità $z=\frac{x}{x+4}$.
Si ha

$$\lim_{n\to+\infty}n(n+2)z^n\quad\begin{cases}=0 & \text{se } |z|<1,\\ =+\infty & \text{se } z\ge 1,\\ \nexists & \text{se } z\le -1.\end{cases}$$

Quindi

1. Se $\frac{x}{x+4}\ge 1$, cioè $x<-4$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=+\infty\ \Rightarrow\ \text{serie non converge.}$$

2. Se $\frac{x}{x+4}\le -1$, cioè $-4<x\le -2$, allora

$$\lim_{n\to+\infty}f_n(x)\quad\text{non esiste.}$$

3. Se $-1 < \frac{x}{x+4} < 1$, cioè $x > -2$, si ha
$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0.$$

Concludiamo che
$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n+2)\frac{x^{n+2}}{(x+4)^n} \quad \text{non converge in } (-\infty,-2]\setminus\{-4\}.$$

Studio della convergenza puntuale. La serie converge **assolutamente** su $(-2,+\infty)$. Infatti la serie dei moduli
$$\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)| = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n+2)x^2 \left|\frac{x}{x+4}\right|^n$$

- per $x = 0$ converge.
- per $x \in (-2,+\infty)\setminus\{0\}$, la serie è a termini positivi, e posso applicare il criterio del rapporto:
$$\frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = \frac{(n+1)(n+3)}{n(n+2)}\left|\frac{x}{x+4}\right|$$
da cui
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = \left|\frac{x}{x+4}\right| < 1 \quad \text{su } (-2,+\infty).$$

Dunque si ha
$$\text{su } (-2,+\infty) \text{ convergenza assoluta} \Rightarrow \text{puntuale}.$$

Osservazione. Lo studio della convergenza puntuale/assoluta/uniforme/totale della serie può essere alternativamente sviluppato sulla base della teoria delle serie di potenze, dacché
$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n+2)x^2\left(\frac{x}{x+4}\right)^n$$
può essere studiata come serie di potenze (con il cambiamento di variabile $z = \frac{x}{x+4}$. **Esercizio:** adottando questo nuovo punto di vista, riottenere i risultati summenzionati.

Esercizio 5. Sia
$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - |x| & \text{se } |x| \le \frac{1}{2}\,, \\ 0 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$
Discutere la convergenza puntuale e uniforme della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} g(x-n)$$

Svolgimento. Poniamo
$$u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} g(x-n).$$
Convergenza puntuale: con un semplice ragionamento grafico si vede che $\forall\, x \in \mathbb{R}$ esiste al più un indice $n_0 = n_0(x) \in \mathbb{N}$ tale che $u_{n_0}(x) \neq 0$. Quindi
$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = u_{n_0}(x)$$
Perciò si ha convergenza puntuale in $\mathbb{R}$ ad una certa funzione $f = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Convergenza uniforme. Per ogni $n \geq 1$ si consideri la successione delle somme parziali fino all'indice n

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge uniformemente ad f in $\mathbb{R}$ se e solo se $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge ad f uniformemente in $\mathbb{R}$, ovvero se e solo se

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \sum_{k=1}^{n} u_k(x) - \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) \right| = \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| = 0.$$

Ora, per $n \geq 1$ fissato si calcola

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| = \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$$

Allora

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| = 0 \;\Rightarrow\; \text{si ha convergenza uniforme in } \mathbb{R}\,.$$

Esercizio 6. Determinare l'insieme di convergenza puntuale di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{x}{n^3}\right).$$

Il limite è continuo sull'insieme di convergenza della serie?

Svolgimento. Ricordiamo che $|\sin(\alpha)| \leq |\alpha|$, perciò si ha

$$\left|\sin\left(\frac{x}{n^3}\right)\right| \leq \frac{|x|}{n^3}.$$

Siccome la serie $\sum \frac{1}{n^3}$ è convergente, concludiamo che la serie di funzioni converge assolutamente e dunque puntualmente su $\mathbb{R}$.
Continuità del limite. Si potrebbe cercare di vedere che la serie converge totalmente su $\mathbb{R}$. Ma si ha

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\sin\left(\frac{x}{n^3}\right)\right| = 1$$

e perciò non si può avere convergenza totale su $\mathbb{R}$. Si può però osservare che la continuità è una proprietà locale: quindi basta dimostrare che la funzione f, somma della serie, è continua su ogni intervallo limitato di $\mathbb{R}$ per concludere la continuità su tutto $\mathbb{R}$. Allora, è sufficiente dimostrare la convergenza totale su intervalli limitati. In effetti, su ogni intervallo della forma $[-M, M]$ si ha

$$\sup_{x\in[-M,M]} |f_n(x)| \leq \frac{M}{n^3}$$

con $\sum \frac{1}{n^3}$ convergente. Quindi abbiamo convergenza totale e dunque uniforme su $[-M.M]$. Poiché M è arbitrario, si deduce che il limite f è continuo su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 6. Verificare che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]$$

è uniformemente convergente su $[-1, 1]$.

Svolgimento. Per ogni $x \in [-1,1]$ la serie è telescopica della forma

$$\sum (g_n(x) - g_{n+1}(x)), \qquad \text{con } \ g_n(x) = \frac{x^n}{n}.$$

Quindi possiamo calcolare esplicitamente la successione delle somme parziali: si ha

$$\begin{aligned} S_k(x) &= \sum_{n=1}^{k} (g_n(x) - g_{n+1}(x)) \\ &= g_1(x) - g_{k+1}(x) = x - \frac{x^{k+1}}{k+1} \quad \forall\, x \in [-1,1]. \end{aligned}$$

Il problema si riduce quindi a studiare la convergenza uniforme della successione $\{S_k\}_{k\geq 1}$ su $[-1,1]$.

Basta allora osservare che

$$\sup_{x\in[-1,1]} \left| \frac{x^{k+1}}{k+1} \right| = \frac{1}{k+1} \to 0 \quad \text{per } k \to \infty$$

cosicché concludiamo

$$S_k(x) \to x \text{ uniformemente su } [-1,1].$$

Esercizio 7. Determinare l'insieme di convergenza puntuale di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \exp\left(-\frac{\sin^2(x)}{n^2} \right) \right)$$

Il limite è continuo? È derivabile? In caso affermativo, calcolare $f'(\pi/2)$.

Svolgimento. Per ogni $x \in \mathbb{R}$, la serie è a termini positivi. Inoltre si ha

$$\left[1 - \exp\left(-\frac{\sin^2(x)}{n^2} \right) \right] \sim 1 - \left(1 - \frac{\sin^2(x)}{n^2} \right) = \frac{\sin^2(x)}{n^2}.$$

Osservando che la serie

$$\sin^2(x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{è convergente}$$

concludiamo per il criterio del confronto asintotico che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \exp\left(-\frac{\sin^2(x)}{n^2} \right) \right) \quad \text{converge puntualmente su } \mathbb{R}.$$

Ora osserviamo che le funzioni $f_n(x) = 1 - \exp\left(-\frac{\sin^2(x)}{n^2} \right)$ sono derivabili su $\mathbb{R}$ e verifichiamo che la serie delle derivate converge uniformemente su $\mathbb{R}$: se ciò è vero, il teorema di derivazione per serie ci assicura che la funzione somma della serie è derivabile e quindi anche continua su tutto $\mathbb{R}$. Si ha

$$f_n'(x) = -\frac{2\sin x \cos x}{n^2} \exp\left(-\frac{\sin^2 x}{n^2} \right)$$

da cui

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n'(x)| \leq \frac{2}{n^2}$$

con $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ convergente. Allora la serie delle derivate $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$ converge totalmente e dunque uniformemente su $\mathbb{R}$.
Si ha

$$f'(\pi/2) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(\pi/2) = 0.$$